

數學與生涯規劃的關聯性

星期一, 10th 元月 2011

數學與生涯規劃的關聯性 / 專任輔導員 顏錦偉

《神奇數學 117》作者 Alfred S. Posamentier 認為大家都知道數學一定要好好的學，但是絕大多數的人都學不好，只能抱怨「我討厭數學」、「為什麼我的數學不夠好」。斯坦教授認為數學有點像諺語裡被三個瞎子摸來摸去的大象。摸到腿的說：「象好像一顆大樹。」摸到鼻子的說：「象好像一條蟒蛇。」而摸到耳朵的瞎子則聲稱：「不對，象好像一把扇子。」的確，多數人學數學，只能看到數學的表象，而未能清楚看懂數學的真正原貌，於是抱怨一堆，數學能力始終無法增進。

斯坦教授指出年輕人應該知道，數學是很多職業裡的一種工具。每三個高所得的工作中，大概有兩個需要比算數更高深的數學，用於每天的例行工作。而那些較低所得的工作中，只有十分之一有此需求。懂得數學越多，職業生涯也愈寬廣，會使用數字的人比使用文字的人要高一等，目前國際當紅的科技業、金融業、證券業的一流人才，多來自分析能力很強的理工高手，於是教育專家指示，孩子數學能力的培養跟孩子未來的競爭力息息相關，不可輕忽。^{註一}

九年一貫課程綱要中提到：基本能力—生涯規劃與終身學習，能力指標—具有終身學習所需的數學基本知識及養成凡事都能嘗試用數學的觀點或方法來切入的習慣。課程綱要明白指出現在中小學生必須培養與建立基本的數學能力，以適應未來生活及工作所需，此與斯坦教授所言：數學能力與工作職場及生活謀生是有密不可分的關係。

生涯規劃就是一個人對他的生涯做一個最適合他的妥善計劃與安排，並且能夠運用環境資源，在短期內充分發揮自我潛能，達到各段的生涯成熟，適才是所，最終達到自我實現的境界，圓滿地完成既定的生涯目標，這樣的人生規劃，我們可以稱為「生涯規劃」。^{註二}

數學與生涯規劃有什麼關聯性？數學不只是聰明人的特徵，更是豐富人生的最佳工具，舉凡日用品的買賣、時間運用、空間規劃，甚至理財分析、計畫監控等，都會應用線性或非線性規劃，認識越多、瞭解越多、應用越廣，您的快樂指數就越高。基本上，數學提供人類日常生活所必須的基本技能，進一步，數學增進人

類精神上豐富且多采多姿的生活，人活一輩子，數學就跟著你一輩子。所以，數學跟人的生涯規劃一直是終身夥伴的關係。

阿基米德說過：「給我一個支點，我將撐起地球。」當然，我們不必期待自己和孩子要撐起地球，但是，把數學學好，學會找到自己能力的支點，就一生都受用不盡了。(今周刊, 368 期)我們面對知識爆炸的年代，對一群年幼可愛的學生，教給他好學的、好用的數學知識，帶給他好玩的、有用的數學遊戲，這才是為人師應有的風範。

註一：2010.1.29 引自 <http://tw.news.yahoo.com/article/url/d/a/100129/112/1zoby.html>

註二：取自 <http://www.fths.tyc.edu.tw/~guidance/career.htm>

2. 1

<http://live.ntsec.edu.tw/LiveSupply-Content.aspx?cat=6842&a=6829&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=1&lsid=8369>

資料來源：科學研習月刊 49-8

文/黃敏晃 台大數學系退休

1 數學無用?

有人請筆者去演講，題目是「數學與生活情境之連結」。事後整理講稿，又補充資料，寫成此文，目的想說明生活中常會應用到數學。希望用筆者的生活經驗作示範，拋磚引玉，讓讀者反思，生活中是否也有類似的，甚至更精彩的案例，進而領悟到數學對生活的重要。

數學是許多中、小學生討厭的學科之一。原因複雜，其一是感覺「數學沒路用」。小孩的生活單純，除了購物外，他們不太會感受到數學知識的需要。沒用的東西幹嘛學？其實小孩的世界處處充滿數學的痕跡。

例 1 中的每句話，都是筆者親自聽到不同孩子說的，請注意其中的數學成份。

例 1

- 1.這包糖果蠻大包，一定超過 40 個，足夠分給全班了（ < 40 人），每人分一個還有剩，就買這包好了。
- 2.這台電梯可載七位 70 公斤的大人，雖然現在擠進 10 人，但都是不到 50 公斤的小孩，所以訊號沒響。
- 3.我發現台北市 200 號以上的公車，都是兩段收費。
- 4.橄欖球不完全是圓的，彈跳起來不規則。
- 5.這個風箏做成線對稱的菱形，左右受力均勻，飛在空中時，才不會被吹到打轉。

即使是低年級的小朋友，他們的生活中也無法免除數學的影響。筆者聽過一位媽媽描述，剛上小一的兒子，尚未學到數的合成分解前的趣事，請看例 2 中母子的電話對話。

例 2

「媽，我要 5 塊錢買橡皮擦。」

「早上不是才給你一個 10 元銅板嗎？用這個銅板就可以買了。」

「但我已經把它用掉了。」

「你是怎麼用掉的？」

「我要打（這通）電話給你，電話機上寫 1 元，5 元，10 元都可用，我就投下去了。」

如果老師和家長能夠善用孩子的數學經驗，應該會讓孩子對數學是否有用」這件事，產生不同看法，也影響孩子學習數學的動機，讓他們更積極、主動，得到更好的學習效果。事實上，別人的經驗到底隔了一層，不如自己的經驗那麼親切、深刻。所以，師長若能掌握自家孩子的經驗，助益當然要大得多。

師長要幫助孩子前，最好先自我實踐。自己不會的事情不但沒感覺，講出來的話還會心虛。即使你的身份不是老師或家長，也可以試試看，從自己的生活經驗中，挖出一些有數學味道的東西，然而該怎麼做呢？筆者的心得是，進行這種行為全靠反省、檢討。其實，人類之所以有別於其他動物，全靠我們夠大的腦袋瓜，約有 1400c.c.這麼大，可以做這樣的腦部運作，從經驗中吸取教訓，調整行為，造出全新的事物。

萬事起頭難，尤其是像「生活經驗中的數學要素」，常會和你擦身而過。若不隨時留意，保持高度警覺，尤其是量感方面，一定抓不住。所以，筆者提供自己的做法做為參考。

2 往事歷歷

反省與檢討，一定要養成習慣才會有效。筆者約在 1986 年左右，感到這件工作的重要性後，開始自我訓練。當時筆者還是個夜貓子，午夜最有空，洗過澡後，會泡杯咖啡或一壺濃茶，邊喝邊想，今天發生了什麼事？哪些和數學有關？將整理後登錄在筆記簿上備查。筆者文章裡或演講時談到的案例，大多來自筆記。這個習慣仍持續到現在，退休後生活作息改變，早睡早起，反思活動就留到每天早餐後。所以，當友人和學生羨慕筆者找得到這麼多與生活相關的數學案例時，他們可能沒有連想到背後的辛酸。筆者曾說藝人是「台上五分鐘，台下十年功。世間的天才很少，大部分的成就都有前因。」

一個人會對某件事付出努力，是因他有正確的態度，即把它當作最重要的事情來看待。許多老師說，數學和生活的連接很重要，但常常只是嘴巴說說，並未實際從生活中尋求含有數學成份的案例，這種態度很難說服學生，因為學生很容易看出你「誠意不足」。

有次看電視，講到許多節目都有諧星幫忙潤滑，總能在關鍵時刻接話，講出幽默橋段，連接適當故事，令人佩服時，有位來賓爆料說，其實這些諧星們經常聚餐，互相切磋在何種狀況說什麼話，可能得到什麼效果。他們的專業精神，值得我們學習。為方便起見，筆者們從購物行為說起，從中牽涉到一些數學運算。讀者可就例 3 的項目作練習。若加入些曲折、令人意外的情節，更是講課時（或寫作）的絕佳題材。

例 3

1. 造數—用身上的錢湊出貨物價款。
2. 加法—買幾樣貨品，計算各貨款的和。
3. 減法—拿出大鈔，付錢找零。
4. 乘法—買同價貨物多項，求總貨款。

5. 除法—好幾人同吃一桌，餐後平分付帳。

6. 百分率—計算 5 % 或 10 % 的貨物稅，15 % 的小費。

7. 比價—貨比三家，同樣的貨品誰最便宜？而不同品牌，則有不同因素介入。

例 3 中的第 7 項有很多變化的，拙作「人間處處有數學」中有則選購一瓶咖啡粉的案例，可供參考。在傳統市場買菜，有時會產生 3 把青菜或 4 個蘋果只要 50 元的促銷，這樣買固然方便，是否比稱斤兩便宜呢？若買的量少，價錢也不高，通常也沒人認真追究。

由於筆者個性大而化之，對小錢不甚追究，曾吃過幾次小虧。譬如說，付帳後找回的零錢，常不點算就放口袋，事後發現有誤，店家卻不認帳，幾次學乖後就比較注意了！最近和內人去那種專賣給大學生吃的簡餐店，飯後付一張千元大鈔，竟只找回 4 張百元鈔！筆者問餐價多少，老闆說各 100 元，那怎麼只找筆者 400 元？她連忙道歉說，誤將一張百元鈔看成 500 元。照筆者看，她的收銀機內，各類鈔票放在清楚位置，怎有可能弄錯？

關於這點，美國的商家就好得多，他們用加法而非減法結帳，絕不馬虎：假設消費物品總價含稅為 8.65 美元，你拿一張 10 美元紙鈔付帳時，他們會指著貨品說 8.65 美元，拿出一張 1 美元紙鈔說 9.65 美元，再拿出一個 25 分的銅板（1 美元 = 100 美分，這種銅板俗稱 quarter，即 1/4 美元），對你說 9.9 美元，最後再拿一個 10 分的銀角子，再對你說 10 美元。

3 四捨五入

筆者常到某連鎖店買衛生紙，因為它在廣告中宣稱，同類產品它最便宜。這類衛生紙產品已然規格化，如每包 120 抽，尺寸約為正方形，大小一致，品質相差不多（每張都由兩張較薄的合成），故比較價格是有意義的。另一家在夾報廣告單上說，每小包賣 8 元。因它離筆者家較遠，筆者還是帶著那張廣告單到這家連鎖店去買。

該店門口大張看板貼著：衛生紙每小包 8 元；而店內有一處存放著由 12 小包組成一大包的貨品，有張較小的看板，寫著：每大包 99 元。筆者便拿了兩大包到櫃台結帳，收銀機「叮」的一聲，年輕的店員說：「198 元。」

當下筆者有點猶豫，到底要不要計較這「6 元」的差額？筆者覺得產品已夠便宜，「6 元」對筆者也無關痛癢。通常筆者都很「鄉愿」地不吭聲，但這次真的很想知道，一個店家對自家貨品價格上的「數量矛盾」有沒有察覺？有的話，又抱持何種態度？於是筆者在付她 200 元時說：「不對，你應該找我 8 元！」

她愣了一下後，冷靜地說：「沒錯，每大包 99 元，兩大包共 198 元」筆者指著門口「每小包 8 元」的看板說：「每小包 8 元，一大包共有 12 小包， $8 \times 12 = 96$ 。所以你每大包只能收 96 元。」「小包的當然賣 8 元，但大包的是每大包 99 元。」她顯然完全沒察覺到，大包和小包的衛生紙之間，存在著某種「化聚」關係。

筆者說：「如果我買的是 24 小包，你算算是多少錢？」她說：「可是你拿的是大包的。」「你要我把它們拆開來算，才看得到它們是 24 小包嗎？」不清楚她有沒有聽懂，因為她沒回應，逕自按鈴把店長找來。一位打扮俐落的中年婦人，很有威嚴地問著：「你有什麼問題？」筆者告訴她後，她在計算機上打出 $99 \div$

$12=8.25$ 給筆者看，然後說：「沒錯， 8.25 在四捨五入後就是 8，一小包是賣 8 元。」筆者真的又好氣又好笑，打出最後一張王牌說：「我不管你如何四捨五入，只問你每小包有沒有收超過 8 元？這張發票就是證據，你們比這張廣告單的店家賣的貴，照理說，你們應該用 2 倍價買回去才對。」

這時已有一大群顧客聚集在櫃台邊，她態度立刻軟下來說：「請等一下。」，她打了個電話後，吩咐女店員重新打了張 192 元的發票給筆者。當天下午，筆者又經過該店，一大包 99 元的看板已經拿下來了。筆者突然感到後悔，早上不該買那麼多，不然現在就可以再去買，看他們一大包到底賣多少錢？

一般的生意邏輯是，買少稍貴，買多便宜。若每小包賣 8 元，則一大包售價應該是 96 元以下才合理。關於此事該店大可解釋為：一大包 99 元本是它的售價，當競爭對手打出每小包 8 元的低價後，只好跟進。臨時在各連鎖店貼出每小包 8 元的看板，以免砸了「這類貨品最便宜」的招牌，只是忘了兩者間的連結。上述案例給了筆者兩點感想，一是很多店家的數學程度有很大的改進空間，該店長的「四捨五入」運用，真是令人慚愧！我國的數學教育，到底出了什麼問題？竟有人把「四捨五入」和生活情境如此連結。其次，積極面對是有效的。筆者的個性低調，多一事不如少一事，讓店家佔點小便宜並不在意，人生何苦斤斤計較？但想到這些人若不加以點醒，可能變本加厲，最後害人害己，故盡點社會教育的責任，也是應該。

4 無所不在

前陣子，兒子媳婦開車載筆者去診所看病，途經一大幅廣告看板，宣傳「月息 4 分」的貸款店。關於「4 分」的意義，車上 3 人竟有二種不同解釋：

4/100 或 4/1000 到底哪個才是正確的？

對某種數據做「解讀」，是生活中常遇到的「溝通」問題，其判斷需要做簡單的估計：假設每月利息是 4/100，則一年利息（此處暫時忽略複利的影響），差不多是 $4/1000 \times 12 = 48/1000 < 5/100$

這樣算來，年利率幾乎等於銀行貸款的行情，輪不到打此廣告的「高利貸」店來做此生意。由此推論可知，月息 4 分表示每個月要繳納 4 % 的利息，比如說借款 100 萬元，每個月需交利息 4 萬元，一年的利息是 48 萬元，幾乎是所借款項的一半。所以，美國人將放高利貸比喻為 loan Shark（貸款鯊魚），會吃人的。

數學除了「解讀」溝通，還有更洞察人心的溝通案例（例 4）。

例 4

有次搭捷運從公館到淡水，正是上班人潮最多的時候。人老又撐著拐杖，很快就有好心的年輕女生讓座，謝座坐下不久後，她的手機響起，聽其對話知道是一起要去淡水的的朋友，且在同一班列車上（同時在古亭站），但不同車廂（他在第 2，她在第 5）· 兩人顯然很想立刻見面，要在擁擠的車廂內找人相當困難，只好作罷。

筆者想了想後告訴她，捷運每節車廂有四個門，把整個車廂分成十二個區塊，如圖一，每個區塊估計約有 20 人，在 20 人中找到朋友，遠比在整個車廂 200 多人中找到朋友容易許多。她聽完立刻用手機回 call，溝通了她的位置，他在列車抵達台北火車站前，就站在她身邊了。筆者很高興能用數學溝通，回報她讓座的善行。



圖一 捷運車廂模擬圖

這些用法雖然沒有出現在中、小學數學課本，卻是座標定位法的簡單應用，是我臨時想到的。如果你沒有把數學忘記，能活學活用，應該也用得上，下面也是最近發生的例子。

例 5

女兒女婿最近搬來跟筆者和內人同住，當然歡迎。筆者把書房讓出來，雖然乘機丟了很多東西，還是有捨不得丟的老古董需要收納，於是買了幾個收納箱回來。收好東西後想放床下，才發現箱子太高，塞不進去。只好再量了床底板的高度，到賣場去找高度適合的箱子，才完成任務。

記得以前每兩、三年，就會想改變一下辦公室或臥房的擺設（喜新厭舊）。初次發想時採具體運作，即興的搬動書桌、櫥櫃等，看看位置是否合適？不但辛苦，效果也不好。後來就學會形式運作：先量好房間及各式家具的尺寸，按比例畫出各種可能擺設的縮小圖，判斷可行後，才具體動手。

數學對人類的最大功用，就是如例 5 的「規劃」，而不是等事情發生，成敗無法改變後，再亡羊補牢。理論上，規劃可以減少失敗機率，使數學變成人類最寶貴的學問之一。所以，即使數學這麼抽象、形式，學起來這麼困難，還是各級學校的必修課程之一。

5 形成推論

數學能有這麼多功能，最主要是有「推論」這個運作。「推論」源自古希臘人對幾何的探索，他們發現「眼見不一定為真」後，逐漸發展出「從大家共同承認的道理和事實（公理和公設），推論出結果」的學問，被認為是現代數學的開端。本文暫不多談歷史與學理，僅看一些生活推理的案例。

例 6

某次和數位退休老師聊天，談到很多學校遇缺不補，反而找退休老師代課。對年青的候補老師並不公平，對這個行業發展也不好。究其原因，是少子化現象，以往每年新生兒約 30 萬人，近幾年銳減到不足 20 萬人。每年少了 10 萬個學生，縱使每班學生人數略有調降（小學每班最多 30 人，國中 35 人，高中 40 人），但全國總班級數仍持續下降，故相應的老師總人數（每班約配 2 位）勢必跟著調降。

倘若同一所學校內，今年退休老師數，大於減班而需要調降的老師數，理論上應加聘一些老師來任教。但是，若明年還會減班，且沒人退休，校方就不會聘用新老師，而改以退休老師代課。從這個問題出發，筆者們談到台灣未來的人口數，預測它會大幅下降，如下：假設臺灣每年出生 20 萬個嬰兒，又假設每個人的壽命為 80 歲（概略的平均年齡）。則未來臺灣的總人口數應上限為 1,600 萬人（ $20 \text{ 萬} \times 80 = 1600 \text{ 萬人}$ ）。

這是狀況理想化的估計，相較以往每年出生約 30 萬個嬰兒，而人口總數約 2400 萬， $2400 \text{ 萬} + 30 \text{ 萬} = 80$ （歲）。由此看來，這應該是合理的計算模式。問題是，在此狀況下，教師人數只會持續下降，對想投身教職的年青人而言，並不是好消息。於此順便談談這群退休教師的看法，最近失業率持續超過 5%，其中流浪老師約占 2 萬人之多，要如何安置他們呢？讓筆者們先分析此問題的一些週邊狀況，如下：

A.年輕老師養成需一段時間，縱使大學畢業前已完成教育學程，也經歷了實習的磨練，但要成為一個運作順利的老師，據經驗估計至少需要五年，這也是家長們喜歡退休老師短期代課的原因。換句話說，新聘老師的頭五年是學校投資老師，這段時期他常會需要校方或資深老師幫忙協助。

B.年長（ > 50 歲）的資深老師，雖然經驗豐富，但與精力充沛的小學生一起過一天（ $07:30 \sim 16:30$ ），常感體力不足，若想領月退俸，得滿足退休條件：年齡十服務年資 ≥ 85 ，大部分老師大學畢業時剛滿 22 歲，到 54 歲才服務滿 32 年， $54 + 32 = 86 > 85$ ，故 54 或 56 歲（男生兵役）後才是屆齡退休。

C.有年長老師表示，到 50 歲就有職業倦怠症了，為符合退休條件還得拖 5 年，感覺很辛苦。筆者試問，若把月薪（約 7 萬元）分一半請一位年輕教師，分擔年長老師大部分任務（如帶一個班的級任），年長老師擔任指導的角色，直到退休，是否願意？許多年長老師回答，願意。

本提議不可能強制執行，非得要年長老師願意才能進行。好處是解決部分流浪教師的問題，而政府需支出的經費為健保與退休金等，年長老師分出一半薪水後，減輕了職務責任，幾年後也得以拿到月退的年資。看起來應該是多贏的政策，但筆者想政府（不管煎綠）不見得會採納，這還需要很多配套措施。

6 用進廢退

達爾文的「進化論」中談到兩個主要進化機制，「基因突變」及「用進廢退」。本文想談的是後者，意指動物的某些器官因使用頻率的多寡，而進化或退化。如鯨豚類之哺乳動物，原是生活在陸地（有適合呼吸的肺，而無適合在水中吸取氧氣的鰓），後因追逐獵物，選擇到海中生活，久而久之，其手腳型態的四肢退化，逐漸進化成適合水中運動的鰭類型態。

「用進廢退」跟本文有什麼關係？筆者的觀點是，人的潛力是很大的（很想用「潛力無窮」一詞，據說至今人腦被活用-activated-的腦細胞僅 5% 左右；若能多 1% 的腦細胞被活用，應該不得了），如果筆者們能夠堅持，專注全力於一件事，定可以把這件事越做越好。這件事也許是游泳、騎單車，或是「把數學和生活情境連接」，筆者的個人案例，可做為佐證。

筆者在腳踝開刀三個月之後，開始使用拐杖，因拐杖把手呈圓弧形，施力不當而使右手姆指變成媽媽手（因母親懷抱嬰兒而產生姆指相關肌腱發炎而名），連寫字都有困難，更別說作其他動作，因而開始訓練用左手，左撇子能用左手做出一般人右手能做的事，表示人體的結構左、右是對稱的。開始時筆者訓練左手做些右手常做的事，諸如吃飯或刷牙。在刷斷一根牙刷後，覺得有必要分解刷牙的基本動作，還算單純，如下：左右橫刷，上下縱刷，由裡往外挑等，練習一段時間後，才能俐落執行。

用筷子挾食物，則不如刷牙單純（不禁想起招待過來亭訪問的外國友人，第一次用筷子的窘態），由於每根手指使力的大小和方向都不相同，我以挾起一粒花生，放入口中為初級目標鍛鍊左手，直到撰寫本文時，左手還僅能用刀、叉和湯匙吃飯。

例 8

為響應節能減碳，少用冷氣，家裡買了幾架電風扇。不同款式，不同品牌，但都是零件打散裝箱運來的，需要組裝後才能使用。看懂零件圖（看圖形辨認零件），及組裝圖（弄清楚各零件之間的相互位置關係），並能按圖組裝出可以運轉的電風扇，是現代國民必備的數學能力。組裝第一架電風扇時，看圖動手，有時還要想想，有點像解數學中的非例行性問題；但第二架和第三架風扇的組裝方式雖不盡相同，但都變成例行性解題。應該是人類本能上擁有某種程度的類化能力，故相似任務很容易上手。

由此可見，人類的許多能力，包含數學能力在內，都是可以發展出來的，且越用越熟練。從筆者的生活經驗中，抽出數學要素的能力，也是經過長期發展，變成專長之一。這篇文章長了些，雖然言猶未盡，還是得結束，未談到的事情，下篇文章再談吧！